

(3)知能機械システム工学実験・実習 I (工業力学：振り子実験)

[1] 学習内容 (機械力学, 特に動力学 (物体の運動を取り扱う力学) の基礎, 常微分方程式)

専門工学としては,

- ・運動体に働く各種力 (慣性力, 減衰力, バネ反力)
- ・条件 (初期条件, 自由振動, 強制振動)
- ・回転運動についての基礎知識

を学び, 物体の運動を表す基礎方程式 (運動方程式) の最も基礎的なものとして,

・1 質点系 (一個の重心) の運動方程式の表現 (2 階の常微分方程式) と解法および解の意味について理解する.

実験・実習としては, 振り子実験の準備, データの取得・処理, 考察, レポート作成を行う.

機械構造物の設計・開発において, その力学を取り扱うのが機械力学であり, 機械工学の 4 力学の一つとなっている. 機械力学の中でも, 力を考慮して物体の運動を取り扱うのが動力学である. 私たちの身の回りでは, 自動車や船舶といった乗り物の揺動や, 建造物に作用する風力などによって生じる揺れなど, 揺れ, すなわち「振動」は日常的に経験するものであり, 動力学では振動学の理解が最も重要である. しかしながら「振動」と一言で表現しても, 振動の基本的機構の違いによって振動は様々に分類されるが, 今回の実験では最も一般的な線形振動, かつ自由振動を観察し, 振動学の基礎を学ぶ.

参考: 振動 (JIS B 0153-1985 (機械振動・衝撃用語))

ある座標系に関する量の大きさが, その平均値または基準値よりも大きい状態と小さい状態とを交互に繰り返す変化. 通常, 時間に対する変化である.

[2] 運動方程式

運動方程式は, 慣性力項, 粘性 (減衰) 力項, ばね反力項と外部入力の項から成る.

2.1 並進運動する物体の運動方程式

今, 時刻 $t=t$ における物体の重心の x 方向位置を $x=x(t)$ ($x(t)$ は時刻 t の関数) とする.

・慣性力

自動車が急発進や急停車をすると, 乗っている人は電車の加速度とは逆向きに力を受ける. この加速度運動をするために生じる見かけの力が慣性力である. 物体は慣性の法則により, その運動状態を維持しようとする性質があるが, 慣性力とはそのような性質に起因する見かけの力である. 慣性力は, 質量と加速度に比例するため, 力 F は質量 m と加速度 ($a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$) を使って, 次式で表される.

$$F = m\ddot{x} \quad (1)$$

・減衰力

水をかき混ぜた時, その速度に比例して抵抗が変化するのを感じたことがあるだろう. これは, 分子同士の摩擦に逆らってエネルギーを消費するためであり, 速度が増加するにつれて衝突する分子が増加して抵抗が大きくなる. 物体の速度 ($v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$) が増加するのに比例して発生する力 F は大きくなるため, 減衰係数 (粘性係数) を c として, 減衰力 F は次式で表される.

$$F = c\dot{x} \tag{2}$$

・バネ反力

バネを伸ばした時、その伸び量に比例して抵抗が大きくなる。したがって、バネの伸び x とバネの材料や形状に依存して決定されるばね定数 k を用いて、次式のように表される。

$$F = kx \tag{3}$$

・運動方程式

物体に作用する力は以上の 3 個の力と外部入力される力 $F(t)$ である。 $F(t)$ は時間 t の関数であり、周期的な力を三角関数で表現したもの（例えば、 $F(t)=A\sin(\omega t)$ ）などが使われる。上記の 3 個の力と外部入力される力 $F(t)$ は釣り合っており、物体の運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{4}$$

これが、物体の運動を表す基礎方程式である。2 階の常微分方程式であり、数学的に解いて解を求める。入力 $F(t)$ を与えるものが**強制振動**、 $F(t)=0$ のものが**自由振動**である。

式(4)は一個の物体（一質点）が一次元の運動をするものであり、3次元では y, z 方向にも同様の式が得られる。また、多質点では、 x_1, x_2, \dots で同様に表現し、その連立方程式を解くこととなる。

2.2 回転運動する物体の方程式

前節は、剛体（変形しない物体）が並進（直進）運動するものであり、剛体の回転運動についても表現する必要がある。今回の 1 次元自由振動の振り子実験を例に、式を導出する。基本は並進運動と同じである。その構造を模式的に表現すると図 1 になる。回転軸 O からアームが伸び、質量 m の錘（物体）が取り付けられている。また、アームにはバネ（バネ係数 k ）・ダンパー（減衰器）（減衰係数 c ）が取り付けられており、図面垂直方向周りに角度 θ で回転する。アーム・ダンパーおよび錘の取り付け位置（長さ）を回転軸 O から L 及び a とする。重力加速度 g が上から下方に向けて存在し、アームの回転角度を θ と表記する。前節の物体の重心の x 方向位置に対応するものが θ である。角速度は $\dot{\theta}$ 、角加速度は $\ddot{\theta}$ である。

・慣性トルク

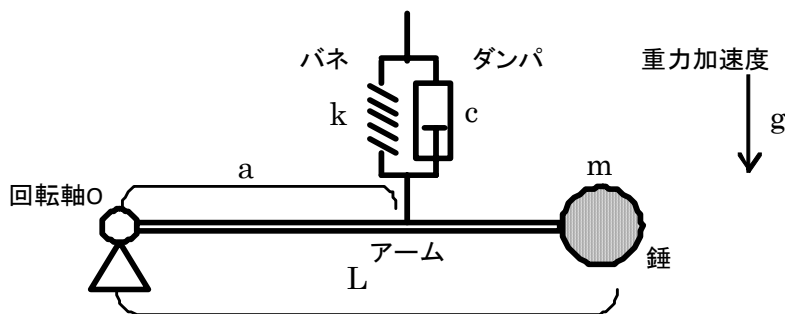


図 1 一次元自由振動系

物体にひもをつけて回転させた時、物体の質量が大きくなれば、必要な回転力（モーメント、トルク）は大きくなる。また、同じ質量の物体でも、半径が大きくなれば、トルクは大きくなる。したがって、トルク T は質量 m だけで単純に表すことができず、慣性モーメント I と呼ばれるものを用いて

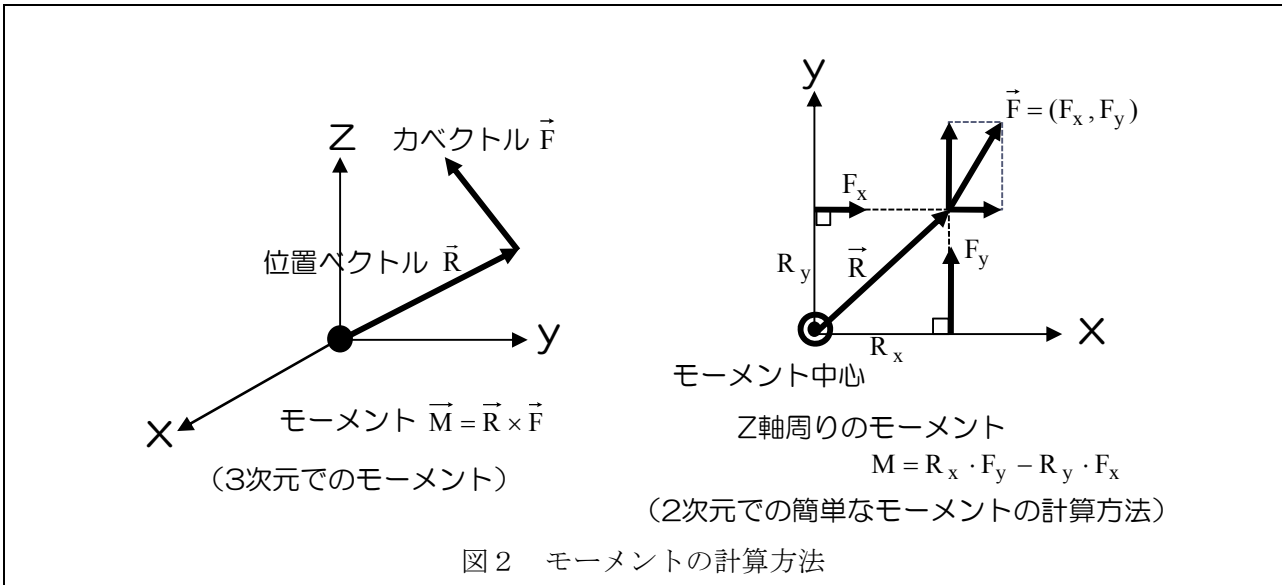
$$T = I\ddot{\theta} \tag{5}$$

と表される。 I は物体の質量 m と回転半径 L に依存し、式(5)中のアームの質量を無視して近似すると(2)式となる。

$$I = mL^2 \tag{6}$$

・減衰トルク

回転力（モーメント）は、回転中心と力の作用点を結ぶ線と力の向きが垂直な場合、回転半径と力の積で表される（図2、ベクトルの外積参照）。



〈ベクトルの外積〉

2個のベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積は、

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{a}$$

〈外積で得られたベクトルの大きさ〉

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad \theta \text{は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ の間の角度}$$

\vec{a} と \vec{b} からなる平行四辺形の面積

アームが回転した時、ダンパーの取り付け位置でのアーム垂直方向の移動速度は $a\dot{\theta}$ であり、ダンパーによって生じる減衰力 F は $ac\dot{\theta}$ となる。時刻 $t=t$ の時のアームの角度が θ の時、アームとダンパーによる減衰力は垂直でない。したがって、減衰力の垂直方向成分は $ac\dot{\theta} \cos \theta$ であり、減衰トルク T は

$$T = a^2 c \dot{\theta} \cos \theta \tag{7}$$

となる。

・バネ反力によるトルク

時刻 $t=t$ の時のアームの角度が θ の時、バネの取り付け位置でのバネの押し込み量は $a \sin \theta$ であり、バネの反力は $aks \sin \theta$ となる。したがってバネ反力によるトルクは

$$T = a^2 k \sin \theta \quad (7)$$

となる。

今回の実験では強制振動を入力しておらず、以上より運動方程式は次のようになる。

$$I\ddot{\theta} + a^2 c \dot{\theta} \cos \theta + a^2 k \sin \theta = 0 \quad (8)$$

式(8)に於いて振動が微小である場合、つまり $\theta \cong 0$ とすると、テイラー展開より $\sin \theta \cong \theta, \cos \theta \cong 1$ とおくことができ、

$$mL^2 \ddot{\theta} + a^2 c \dot{\theta} + a^2 k \theta = 0 \quad (9)$$

と近似できる。

$$\text{マクローリン展開 : } f(a + \Delta a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \Delta a + \frac{f''(a)}{2!} \Delta a^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Delta a^n + \dots$$

$$\text{テイラー展開 : } f(\Delta a) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \Delta a + \frac{f''(0)}{2!} \Delta a^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Delta a^n + \dots$$

(例) θ が微小で θ^2 以上の乗数はほぼゼロとして、テイラー展開にて 1 階の微分項までを近似すると、

$$\therefore \sin \theta \cong \sin 0 + \sin' 0 \cdot \theta = 0 + \cos 0 \cdot \theta = \theta$$

$$\therefore \cos \theta \cong \cos 0 + \cos' 0 \cdot \theta = 1 - \sin 0 \cdot \theta = 1$$

式(9)を標準化する。

$$\ddot{\theta} + \frac{a^2 c}{mL^2} \dot{\theta} + \frac{a^2 k}{mL^2} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\zeta \omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (10)$$

ここで、 $\omega_n = \frac{a}{L} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、 $\zeta = \frac{1}{2} \frac{a}{L} \frac{c}{\sqrt{mk}}$ である。 ω_n は固有角振動数、 ζ は減衰係数比と呼ばれる。 a, L, m, k は

正の値である。また、減衰がない振動を扱うものも含めて、 c はゼロ以上である。したがって、 ω_n は正の値、 ζ はゼロ以上の値である。以上を解いて、時刻 t における回転角度 θ が得られる。

2.3 運動方程式 (2 階の常微分方程式) の解

式(10)を解くため、その解を $\theta = Ae^{st}$ とおいて代入すると、次のように記述される。

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (11)$$

補足：今回求める方程式の解は振動的なものであり、一般に三角関数 (正弦波) になる。しかし、三角関数を直接式(11)に代入しても解析が非常に困難である。そのため、解を指数関数として扱うことで代数的な解析を可能とする。オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ($j^2 = -1$) より、指数関数と三角関数を置き換えて計算が可能である。

式(11)を解の公式を用いて解くと、

$$s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n \quad (12)$$

を得る。

式(12)の解は、根号の中身によって、2 個の実数解、重解、2 個の虚数解に分けられる。

- ・実数解の場合 ($\zeta > 1$ の時：過減衰)

式(10)の解は、 A, B は初期条件等によって定まる定数として、

$$\theta = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (13)$$

となる。式(12)から考慮して、 s_1, s_2 は負の値となることから、 θ は時間 t に応じて一様に減少することになる。

・重解の場合 ($\zeta=1$ の時：臨界減衰)

式(10)の解は、 A, B は初期条件等によって定まる定数として、 Ae^{st} の一項だけでなく、 Bte^{st} も解となる。すなわち、

$$\theta = Ae^{st} + Bte^{st} \tag{14}$$

が解となる。式(12)の重解 s は負の値であり、 θ は時間 t に応じて一様に減少することになる。 $\zeta=1$ の時の減衰係数の値 c_c は、

$$c_c = 2\frac{l}{a}\sqrt{mk} \tag{15}$$

と表され、臨海減数係数と呼ぶ。また、他の減衰係数をこれで割った値 $\zeta = c/c_c$ を減衰係数比と呼ぶ。

・虚数解の場合 ($0 \leq \zeta < 1$ の時：不足減衰 (減衰振動))

式(12)の解は、虚数 j を用いて、

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \tag{16}$$

となり、 C_1, C_2 を任意の定数として、式(10)の解は、オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + jsinx$ より、

$$\theta = e^{-\zeta\omega_n t} e^{jqt} = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$$

$$\text{ここで、 } q = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{17}$$

となる。さらに書き直す。

$$\theta = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(qt - \phi) \tag{18}$$

A, ϕ は任意定数であって、その値は初期条件から求められる。式(18)の $e^{-\zeta\omega_n t}$ の指数は負であり、三角関数の最大値、最小値は ± 1 であることから、振動しながら徐々に減少していくことになる。

以上の場合分けをグラフにすると、図3のように、(a)過減衰、(b)臨界減衰、(c)不足減衰 (減衰振動)の3つの状態に分けられる。(a)過減衰は粘性抵抗が大き過ぎて、ゼロに収束する時間が反って遅くなる。(2)臨界減衰は一様減少で収束できる境界であり、これより減衰が小さくなると(c)のように振動しながら収束していくことになる。自動車の足回りのように、過減衰や臨界減衰では衝撃が大きくなって乗り心地が悪くなり、不足減衰では振動が長続きするといつまでも揺れて挙動を安定させることが難しくなる。収束の早さや挙動の安定性などのバランスを考慮して、軽度の不足減衰に調整しておくことが多い。

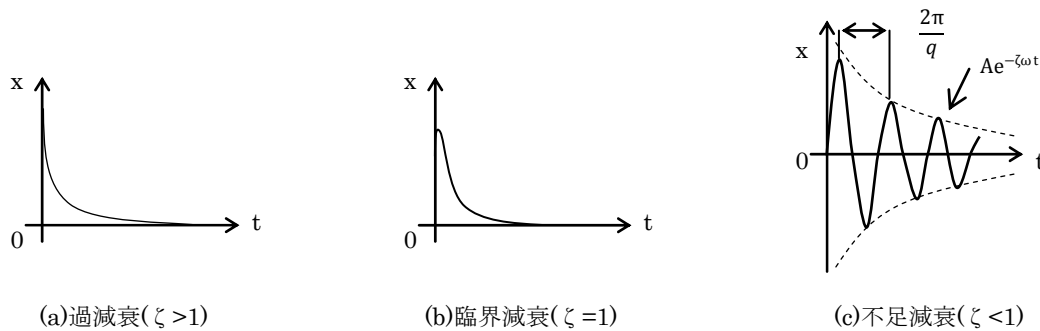


図3 減衰自由振動系の運動特性

2.4 減衰係数 c の同定

今回の実験では、未知数である減衰係数を求めるため、その方法について説明する。測定した a , L , k , m を用い、式(13), (14), (18)に時刻 t の時の振り幅を代入すれば求めることができるが、アームや取り付け部材の重さなど m があいまいであり、厳密に得るには減衰振動を利用するとよい。減衰振動をする際、式(18)から波形の包絡線は $\pm Ae^{-\zeta\omega_n t}$ となる。つまり、図 3c のように、振動波形は 2 本の包絡線の間を振動しながら減衰する曲線になる。

解の曲線 θ が包絡線 $Ae^{-\zeta\omega_n t}$ と接するのは、 $\cos(qt - \phi) = 1$ のときであり、すなわち

$$qt - \phi = n\pi \quad (n=0,2,4,\dots) \tag{19}$$

したがって、解曲線が 1 本の包絡線に接する周期 T_d は

$$T_d = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{20}$$

となる。減衰振動において、 $q = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ を減衰固有角振動数、 $q/2\pi$ を減衰固有振動数と呼ぶ。

相隣する極大値の振幅比を考える。 i 番目に極大値をとる時刻を t_i , $i+1$ 番目に極大値をとる時刻を t_{i+1} とする。ここで振り子は周期運動をしているので、

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\pi}{q} = t_i + \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{21}$$

極大値の振幅比は

$$\frac{x(t_i)}{x(t_{i+1})} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{22}$$

式(22)の右辺に時刻 t が含まれていない。つまり振幅比は時間の経過によらず一定、かつ減衰比 $\zeta = c/c_c$ だけで決定されることがわかる。さて振幅比の対数を取れば指数 e が消えて式(23)に変形できる。

$$\delta = \log \frac{x(t_i)}{x(t_{i+1})} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{23}$$

これからダンパーの減衰係数 c を推定することができる。(※参考資料：コロナ社 機械の力学 (1993))

[3] 使用機器

実験に用いる振り子装置の全景を図 4 に示す。振り子装置は軸受けを中心として回転するアームと、オモリ、バネ固定具から構成されている。オモリとバネ固定具はアームに沿って任意の位置に固定可能である。回転軸には角度センサーが取り付けられており、角度を電圧信号として出力する。

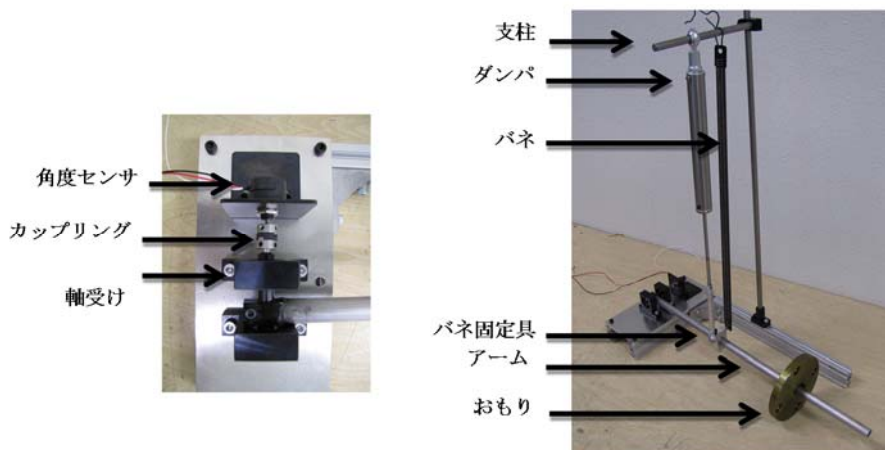
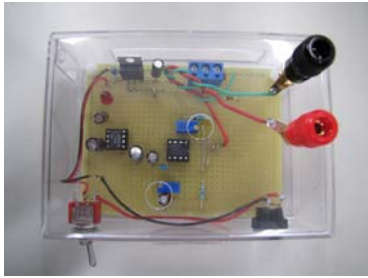


図 4 振り子装置機構

角度センサーからの出力電圧信号を増幅するためのアンプ回路が図 5 である。センサーからの信号を一旦アンプ回路に入れ、増幅されたものを 4ch データ記録装置を使ってパソコンに記録する。



(a) アンプ装置



(b) 4ch データ記録装置

図 5 振り子実験装置のデータ記録装置

[4] 実験装置の取り扱いについて

4.1 おもりのアームへの取り付けについて

おもりをアームに取り付けるときは、図 6 にあるセットカラーを締めて固定する。カラー側面にあるボルトを六角レンチで締めることにより固定される。おもりは 1.38kg, 1.0kg, 0.52kg, 0.32kg の 4 種類用意している。重量物であるので、落下したときに怪我をする可能性がある。机の端には置かないこと。

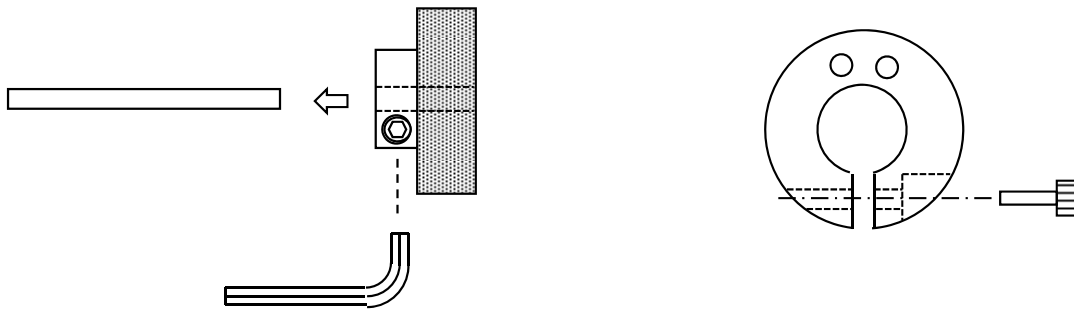


図 6 おもりの固定

4.2 バネ固定具のアームへの取り付けについて

バネ固定具には、バネ及びダンパーを取り付けるためのシャフトと、アームに固定するための穴が開いている。アームに固定するためには、固定具下方側面にあるボルトを六角レンチで締めることで固定される。シャフトにはバネ及びダンパーを取り付ける。シャフト両端に M3 ネジが切っているため、これ

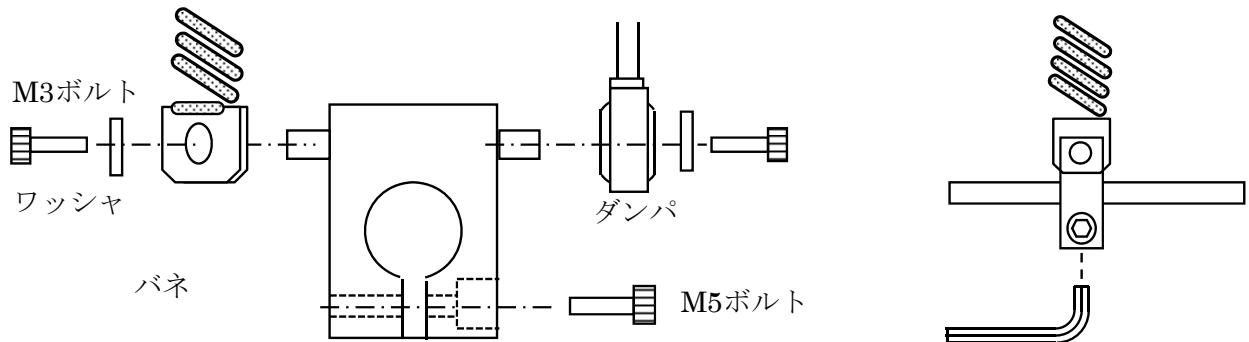


図 7 バネ固定具の取り扱い

を利用して抜け止めを施す。

バネは 0.57N/mm と 0.26N/mm の 2 種類を用意している。バネを伸ばすときなど、反動で怪我をする可能性があるので慎重に扱うこと。

4.3 支柱の位置調整、固定について

支柱の基礎は M6 ボルトで固定されており、フレーム上の任意の位置に固定可能である。ボルトを緩めてバネ固定具と同じ位置になるように調整する。

また、支柱には直交クランプがあり、横支柱の高さ及び突き出し量を調整できるようになっている。バネを固定した後にアームが適切な角度になるように調整する。

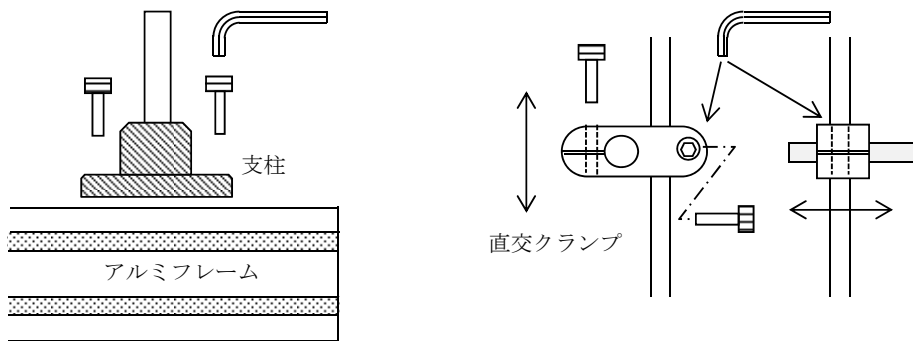


図 8 支柱の取り扱い

4.4 軸受け／カップリング／センサーの取付

軸受けはベアリングを用いて回転軸を保持している。角度センサーはカップリングを介して回転軸に接続されている。

回転軸とカップリング、カップリングと角度センサー軸とは各々 2 本の埋め込みネジで固定される。アームが水平な状態で角度センサーの出力電圧が、ほぼ 2.5V となるように固定する。このとき、角度センサーの軸に対してスラスト方向、アキシャル方向に大きな負荷をかけると破壊されてしまうので無理な力を掛けないように注意すること。

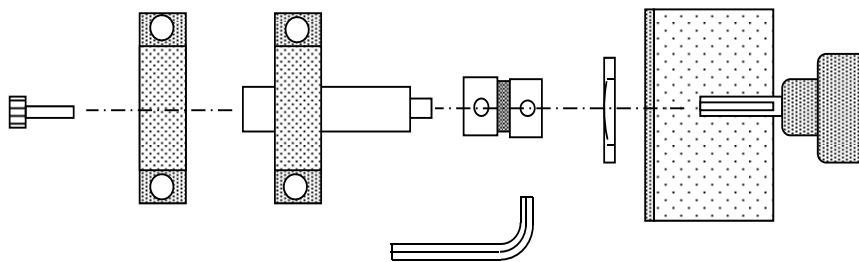


図 9 軸受け・角度センサーの取り扱い

4.5 支柱へのバネ・ダンパーの取り付け

ダンパーはベアリングを横支柱に差し込む。ダンパーは

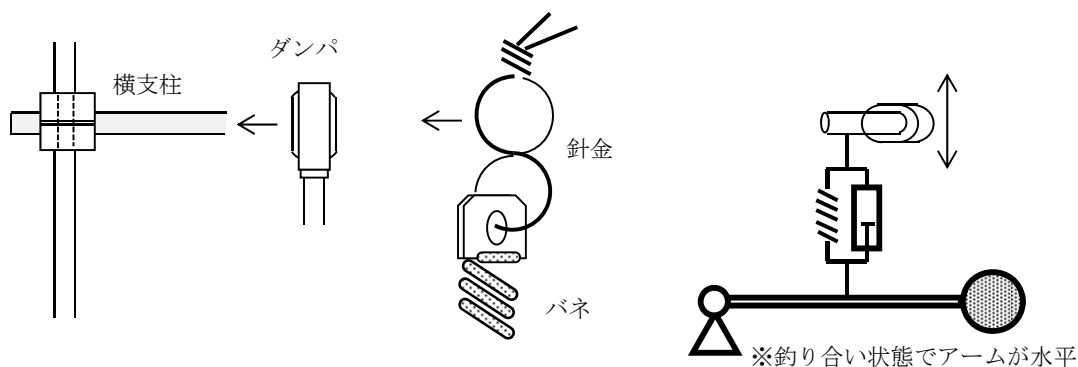


図 10 バネ・ダンパーの支柱への取り付け

ダンパーはステンレスのパイプの内部にピストンを封入した構造になっている。ステンレスパイプは薄肉であるため、外部から力をかけると変形し、ピストンの運動を妨げることになる。机から落としたり、ぶついたりしないように注意すること。

バネは針金を用いて横支柱から吊り下げるように固定する。針金は実験途中で緩まないように、3回以上ねじって固定する。吊り下げ後は、振り子が吊り合い位置にある状態でアームが水平になるように直交クランプの高さを調整すること。

4.6 アンプ回路とセンサーの接続

アンプ回路については資料 A に詳しく記述している。角度センサーからは赤、黒、白の 3 色の配線が伸びており、それをアンプ回路上のセンサー入力端子に接続する。センサー入力端子は、側面の穴に配線を通して、上面にあるネジを締めることで固定できる。

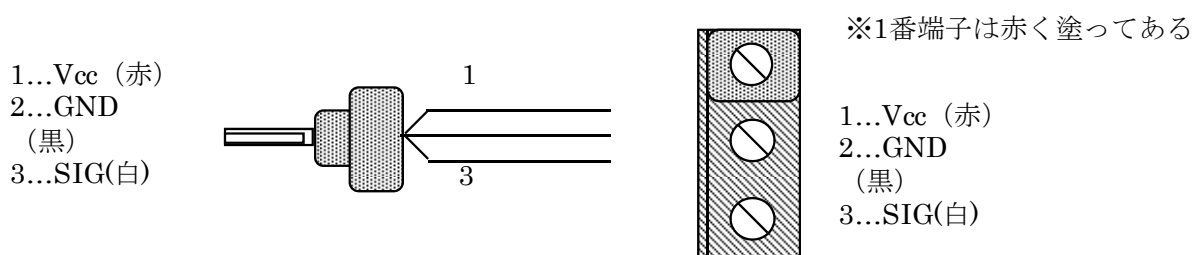


図 11 アンプ回路・角度センサーの取り扱い

4.7 アンプ回路と計測装置の接続

アンプ回路のケースに取り付けられた出力端子と、4ch データ記録装置の CH1 を接続する。データ記録装置の端子台には、チャンネル番号と+記号、Gnd 記号が記載されているので参考にする。配線を間違えるとアンプ回路またはデータ記録装置が破壊される可能性がある。



図 12 計測装置，信号入力端子

[5] 実験

5.1 実験装置の組立

分解されて、箱に収納されている部品を取り出して、組み立てる。まず、アームに取り付けてあるバネ固定具とセットカラーの位置を各班指定の寸法のところに固定する。バネ固定具やセットカラー、錘には幅があり、厳密に重心位置で調整できないため、バネ固定具およびセットカラーの回転外側で所定の寸法となるようにして固定する。また、下記の値を記録する。

() 班：固定具位置 a ()，錘位置 L ()
 ばね定数 k ()，錘 ()
 アームの重さ (260g)，アームの長さ ()

振動部の慣性モーメントは錘とアームの慣性モーメントをそれぞれ求め、足せば得られる。アームの重心位置はアーム長さの半分とする。セットカラーに錘を固定する。

バネを取りつけ、アームが水平になるよう、またバネがアームに垂直になるよう、支柱、横支柱の位置を調節しながら取りつける。

5.2 データ記録装置を使った振動周期の計測

アームを回転させ、回転角度 θ とアンプを通して出力された角度センサーの電圧との校正を得る。幾つかの角度で測定し、後ほど近似曲線が得られるようにしておく。

() ° : () V
 () ° : () V
 () ° : () V

ダンパーを付けない状態で、錘を初期位置に移動した後、手を離して、アームを振動させる。データロガーのソフトウェアを起動して、再度振動させ、データロガーで回転角度 θ が出力・記録されているのを確認する。テキストファイル（拡張子『.csv』）が作成されているのを確認し、MS-Excelにて開き、横軸を時刻 t ，縦軸を回転角度 θ としてグラフを作成する。グラフの波形から周期を求めよ。

【考察】

所定の a ， L ， k ， m を用いて固有振動数の計算式から、予想される振動の周期を求めよ。重力加速度 $g=9.81[\text{m}/\text{sec}^2]$ とする。実際の計測結果と理論値に誤差は生じているか。誤差が生じている場合には、何故誤差が生じているかを考察せよ。また誤差の傾向に何か特徴があるか観察せよ。

5.3 ダンパーを使用した減衰振動の観察

バネと同様にダンパーがアームに垂直になるよう、支柱および横支柱を取りつける。錘を振動させて、回転角度 θ のデータを記録する。下記考察として、減衰係数比 $\zeta = c/c_c$ を求め、減衰係数 c を求める。この

減衰係数 c を用いて、臨界減衰の時のバネ・ダンパー取り付け位置 a を求め、過減衰となる a の範囲に a を変更して、アームを回転させる。この時のデータを記録する。

【考察】

観測した波形において隣合う山の高さの比率を求めることが出来る場合には、対数減衰率を求め、ダンパーの減衰率を推定せよ。また、過減衰となるように、バネ・ダンパー取り付け位置 a を変更し、その時の運動として、予測した結果と測定した結果を比較せよ。