

知能機械実験・実習IV

IV-1. 制御工学実験

1. 実験概要と目的

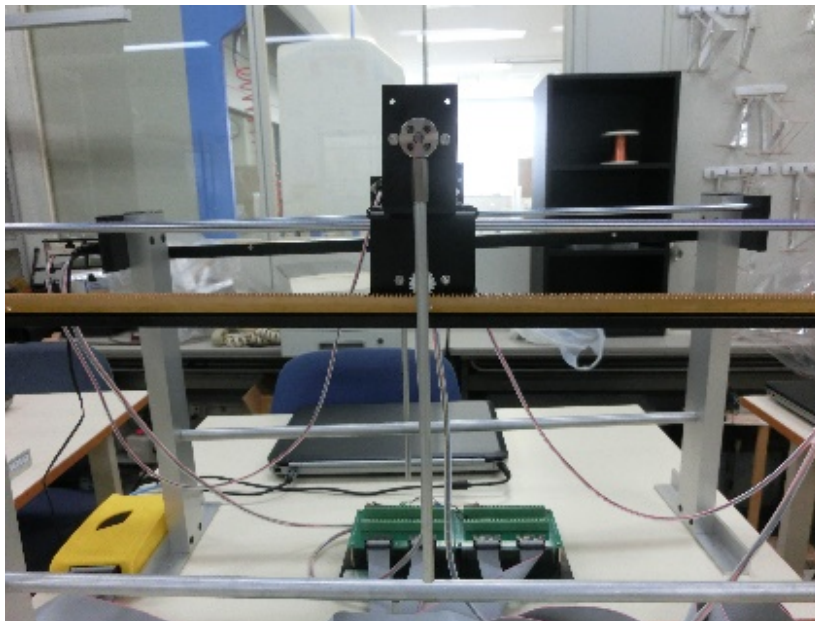
ロボットをはじめとするメカトロニクス機器において、高度な動作を実現している背景には、制御技術がある。制御とは、物体の運動を意図した位置や速度で動かす技術である。

精度の高い制御を行うためには、正しく制御理論を理解した上に、物体の運動を正しく解析し、モデル化する技術や、制御を行うためのパラメータの同定方法を身につける必要がある。

本実験では、制御技術を知る第一歩として、PD 制御と状態フィードバック制御について、実習から、その基礎を理解することを目的とする。

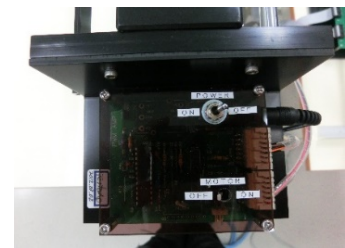
2. 実験装置概要

(1) 装置構成



a-1) 実験装置本体

a.直動型倒立振り子実験装置



a-2) パワーアンプ



a-3) インターフェース
(USB2)

b.制御用コンピュータ

c.説明書

d.使用ソフトウェア

・直動型倒立振り子制御プログラム

・OpenOffice

図1 実験装置構成

(2) 操作手順

(2-1) 実験手順

- ① パワーアンプ部 (モータ SW、電源 SW)、USB2 のスイッチが OFF になっていることを確認する。
- ② PC を起動、USB2 のスイッチを ON にする。
- ③ PC が起動したら、デスクトップ上の STC01 をダブルクリックで、起動する。
- ④ 操作画面の右上の実験の枠内で「モータ角度テスト」が選択されていることを確認する。(選択されていない場合は、左側のラジオボタンをクリックして下さい。)
- ⑤ パワーアンプ電源 SW を ON にする。
- ⑥ 操作画面のパラメータを設定する。
- ⑦ 台車の振り子が外れていることを確認、または、取り外す。
- ⑧ 操作画面右上の START をクリックする。台車を手で動かしたときに、操作画面のモータ角度の数値が台車の移動に連動して変化することを確認する。(変化しない場合には、④から再度行い、それでも、動作しない場合には、①からやり直す。)
- ⑨ モータ角度を 0 近くになるまで、手で台車を動かす。
- ⑩ 台車を手で押さえて、パワーアンプモータ SW を ON にする。台車から手を離すと、モータ角度が 0 点付近まで、自動的に移動します。
- ⑪ 台車を少し、手で動かしてから、台車を話すと、0 点に戻ることを確認する。
- ⑫ 移動させるときは、操作画面の Target に、目標の数値 (-15~15) を入力し、キーボードの ENTER キーをタイプするか、操作画面の START をクリックする。

(2-2) 終了手順

- ① Target に 0 を入力し、操作画面の STOP をクリックする。
- ② 操作画面の EXIT をクリック、もしくは、右上の X をクリックする。
- ③ パワーアンプ上で、モータ SW、電源 SW の順に OFF にする。
- ④ USB2 の電源を OFF にする。
- ⑤ PC をシャットダウンする。

(2-3) データの保存方法

- ① 操作画面が立ち上がったら、データの保存を設定する。
- ② 実験後生成された Plots.csv ファイルのコピーをデスクトップに作成、ファイル名を変更しておく。
- ③ OpenOffice (個人の PC ヘデータをコピーして使う場合は、CSV ファイルを読み取れるソフトウェア (Microsoft Excel 等) であれば可) にて、データを開き、グラフを作成する。(グラフの作成方法については、各自学習すること。)

3. 制御理論基礎

(1) 伝達関数

制御では、入力によって、出力を意図のどおりに動かすことが目的となる。そのため、入力と出力の関係を表現することが重要となる。そのために、用いるのが入力と出力の関係を表したのが伝達関数である。

伝達関数を考える上で、重要となるのが、時間領域と周波数領域の考え方である。我々は基本的に時間領域で、物事を見ている。その場合、起こっている現象は時間に対して、不規則な変化をしており関数で表すことができる。つまり、時間 t に起こる現象 $y(t)$ は、

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin \omega_j t \quad (1)$$

のように、多項式で表すことができる成分

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \quad (2)$$

と、周波数関数である $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin \omega_j t$ で表される

$$B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin \omega_j t \quad (3)$$

に分けることができる。しかし、一般的に物理現象で起こる現象については、指数関数を用いて、

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{b_j t} \sin \omega_j t \quad (4)$$

と表すことができる。

しかし、式(4)で与えられた関数を演算することは極めて複雑な手順を要求される。そこで注目されるのが、ラプラス変換である。(ラプラス変換については補足を参照) 式(4)をラプラス変換すると、

$$Y(s) = L[y(t)] = \frac{\prod_{i=0}^m (a_j s + b_i)}{\prod_{j=0}^n (c_j s + d_i)} \quad (5)$$

のように変換できる。つまり、 s の多項式で表すことができる。

そこで、伝達関数ではこの特性を利用して、運動方程式などの入出力の関係式をラプラス変換により、多項式化して、入力と出力の比で表し、それを伝達関数と呼ぶ。

例えば、次式で与えられる運動方程式において、

$$M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (6)$$

入力を $f(t)$ 、出力を x とした場合、

$$X(s) = L[x(t)] \quad (7)$$

$$F(s) = L[f(t)] \quad (8)$$

とおくことで、式(6)はラプラス変換によって、

$$(Ms^2 + cs + K)X(s) = F(s) \quad (9)$$

となり、伝達関数は次式で与えられる。

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + cs + K} \quad (10)$$

また入出力の関係を図式的に表すために、ブロック線図が用いられる。

(3) 状態方程式

伝達関数が、入力と出力の関係を表すのに対して、システムの内部状態を用いて、システムを表現したものを状態方程式と呼ぶ。その内部状態を表す変数として、状態変数を用いる。

入力を u 、出力を y としたとき、状態変数を x としたとき、式(11)を状態方程式、式(12)を出力方程式という。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11)$$

$$y = Cx \quad (12)$$

このとき、 A を状態方程式マトリクス、 B を入力マトリクス、 C を出力マトリクスと呼ぶ。

例えば、入力 u を $u=f(t)$ 、出力 y を $y=y(t)$ の一次関数とし、状態変数を

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

としたときは、状態方程式および出力方程式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} f(t) \quad (14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

4. 実験手順

4-1. PD 制御

(1) 運動方程式を求める

台車の運動方程式は

$$F = M\ddot{x} \quad (16)$$

である。ここでは台車にかかる力を F 、台車の質量を M として、移動量を x としている。ただし、ラック部の損失は無視する。

モータの電圧を v と回転角度 θ には、次の関係が成り立つ。

$$v = IR + K_m \dot{\theta} \quad (17)$$

式(17)において、 I はモータに流れる電流、 R はモータのコイル抵抗、 K_m は、モータトルク定数である。また、モータの回転角度 θ と台車の移動量 x の間には、次の関係がある。ここで、 r はモータギアの半径である。

$$\theta = \frac{x}{r} \quad (18)$$

モータから発生し、台車にかかるトルクは、

$$T = Fr = K_m I \quad (19)$$

で与えられる。

式(16)~(19)より、 I 、 F 、 θ を消去して、 x に関する微分方程式を求め、入力を電圧 $L[v]=V$ 、出力を台車の移動量 $L[x]=X$ として、伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

(注) 式 (17) の K_m は、一般的には、逆起電力定数に相当するもので、式 (19) のモータトルク定数 K_m とは異なるが、単位を $V/(\text{rad/s})$ とした場合、理論的には同じ値となる。

(2) PD 制御系を構築する

制御における代表的かつ基本的な手法として、PD 制御が上げられる。PD 制御は、目標値と出力値の差分（偏差）に対して比例するゲインと、偏差の微分値に比例するゲインを考慮して制御入力を決める手法である。(1) で求めた伝達関数 $G(s)$ を有するシステムに対して、目標値を x_t とした PD 制御のクローズドループを施したブロック線図は、図 2 で表される。こ

ここで、 K_p は比例ゲイン、 K_d は微分ゲインを表している。図 2 で表されたクローズドループ伝

達関数 $\frac{X}{X_t}$ を求めよ。

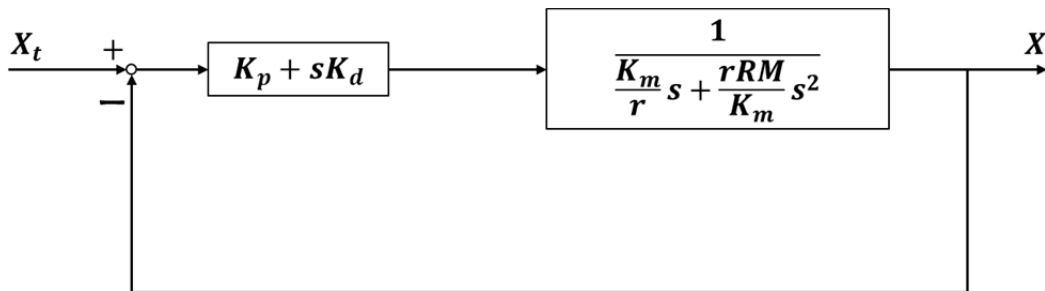


図 2 PD 制御系のブロック線図

(3) 物理パラメータを同定する

(3-1) 操作手順を参考に、以下のとおり、ゲインを変更して、実験を行う

はじめに、ゲインを、

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| K_{mc} | K_{mp} | K_{md} | K_{mi} |
| -0.002 | 3 | 0.0 | 0.00 |

に設定し、静止した状態で、Target の数値に 5 を入れて、START をクリックする。生成された Plot.csv をデスクトップにコピーし、ファイル名を data_01.csv に変更する。

(3-2) 実験で得られたデータより、ステップ応答のグラフを作成する。

前項の実験で保存した data_01.csv より、グラフを作成する。

(3-3) モータトルク定数を求める。

微分ゲイン $K_d=0$ と設定したので、それを (2) で求めた式 $\frac{X}{X_t}$ に代入すると、

$$\frac{X}{X_t} = \frac{K_p}{\frac{rRM}{K_m}s^2 + \left(\frac{K_m}{r}\right)s + K_p} \quad (20)$$

となる。これは、2次遅れ系（補足 II 参照）と呼ばれ、そのステップ応答では、減衰する周期 T_r が、

$$T_r = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{2\pi r^2 RM}{\sqrt{K_m} \sqrt{4K_p r^3 RM - K_m^3}} \quad (21)$$

と求まる。（※減衰周期の求め方参照）そこで、(3-2) で作成したグラフより、減衰のピークの現れる時間を読み取れるだけ読み取り、その差の平均 \bar{T}_r を求める。

式 (21) に、減衰周期 \bar{T}_r に加え、既知のパラメータ

| | | | | |
|-----------|--------------|----------|-------------------------|----------|
| 比例ゲイン： | $K_p = 300$ | V/m | ($\because K_{mp} = 3$ | V/cm) |
| 台車の質量： | $M = 0.42$ | kg | | |
| モータギアの半径： | $r = 0.0063$ | m | | |
| モータコイル抵抗： | $R = 8.3$ | Ω | | |

を入力することで、モータトルク定数を求めることができる。

*式(21)を展開する上で、 K_m^3 は高次であり微小であることから、0と近似して

$$T_r = \frac{\pi r^2 RM}{\sqrt{K_m} \sqrt{K_p r^3 RM}}$$

として求めよ。

※減衰周期（半周期）の求め方

式（20）で表された伝達関数の分母分子に $\frac{K_m}{rRM}$ をかけると、

$$\frac{X}{X_t} = \frac{\frac{K_m}{rRM} \cdot K_p}{s^2 + \frac{K_m^2}{r^2 RM} s + \frac{K_m}{rRM} \cdot K_p} \quad (22)$$

が得られる。これと、補足 II の式（2-1）を比較すると、

$$\omega_n^2 = \frac{K_p K_m}{rRM} \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{K_p K_m}{rRM}} \quad (23)$$

$$\delta = \frac{K_m^2}{r^2 RM} \cdot \frac{1}{2\omega_n} = \sqrt{\frac{K_m^3}{4K_p r^3 RM}} \quad (24)$$

と求まる。これにより、減衰周期は

$$T_r = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{K_p K_m}{rRM}} \sqrt{1 - \frac{K_m^3}{4K_p r^3 RM}}} = \frac{2\pi r^2 RM}{\sqrt{K_m} \sqrt{4K_p r^3 RM - K_m^3}} \quad (25)$$

となる。

（4）最適なゲインを試行錯誤的に求める。

（4-1）操作手順を参考に、以下の目標に対して、適切と思われるゲインを実験から求めよ。

- （I） 収束を早くする。
- （II） オーバーシュートを小さくする。

4-2. 倒立振子の制御

（1）倒立振子も運動方程式を求める

本実験で用いる倒立振子は、4-1 の台車に振りをつけた図 3 に示したモデル図で表すことができる。図 3 で表せるモデルでは、台車にかかる力で振子を振り上げるように間接的に力を加えている。このようなモデルにおいては、運動方程式を直接求めることは難しい。その場合ラグランジュアの運動方程式により求める。

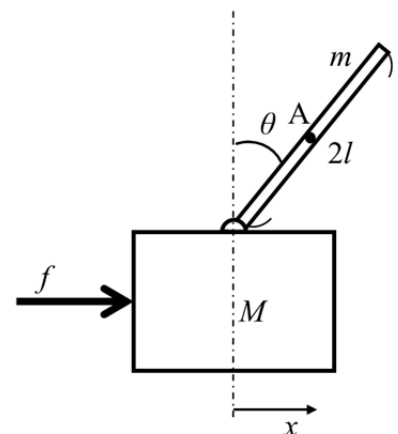


図 3 倒立振子

(1-1) ラグランジュアン L により運動方程式を求める
 まず、ラグランジュアン L により運動方程式を求める。
 台車の運動エネルギー E_{cart} と振子の運動エネルギー E_{pen} を求める。この際であるが、振子の中点 A の位置が、

$$(x_{pen}, y_{pen}) = (x + l \sin \theta, l \cos \theta) \quad (26)$$

で与えられることから、振子の運動エネルギー E_{pen} は次のように求めることができる。

$$E_{pen} = \frac{1}{2} m \{ (\dot{x}_{pen})^2 + (\dot{y}_{pen})^2 \} \quad (27)$$

以上の運動エネルギーと、振子の位置エネルギー P_{pen} から、ラグランジュアン L は、

$$L = E_{cart} + E_{pen} - P_{pen} \quad (28)$$

となる。このラグランジュアンから、台車の移動量と振子の角度に関する運動方程式は以下の式から、求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (30)$$

(2) 伝達関数を求める

式(29)(30)から、伝達関数を求めよ。ただし、振り子の角度 θ は、線形近似できるほど小さいと仮定し、 $\sin \theta = \theta$ 、 $\cos \theta = 1$ 、 $\dot{\theta}^2 = 0$ とおけるとする。

(3) 状態方程式を求める

状態変数を次のように置いたときの状態方程式を求めよ。

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (31)$$

4-3. 自立振子の制御

操作手順を参考に、以下の目標に対して、適切と思われるゲインを実験から求めよ。

- (I) 自立する
- (II) 整定時間を早くする

I. ラプラス変換

$t \geq 0$ において定義された $f(t)$ に対して、次式の定積分による変換をラプラス変換と呼ぶ。

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1-1)$$

このようなラプラス変換は、次式のように表す。

$$F(s) = L[f(t)] \quad (1-2)$$

ラプラス変換では、時間 t で表された時間領域の関数から、 s で表された周波数領域の関数への変換を行っているとして、制御工学では多用される。

ラプラス変換の具体的な特徴や性質は、別途、勉強されたい。ここでは、制御において最低限必要な事項についてのみ触れる。

【線形性】

$t \geq 0$ における 2 つの関数 $f(t)$ 、 $g(t)$ の線形和のラプラス変換は、次のようになる。

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)] \quad (1-3)$$

【導関数のラプラス変換】

$t \geq 0$ における関数 $f(t)$ の導関数 $\frac{d}{dt}f(t)$ のラプラス変換 $L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$ は、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L[f(t)]$ を用いて次の様に表される。

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sL[f(t)] - f(0) \quad (1-4)$$

【積分のラプラス変換】

$t \geq 0$ における関数 $f(t)$ の積分 $\int_0^t f(u)du$ のラプラス変換 $L\left[\int_0^t f(u)du\right]$ は、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $L[f(t)]$ を用いて次の様に表される。

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}L[f(t)] \quad (1-5)$$

一方で、 s 領域にある関数を t 領域に変換ことをラプラス逆変換と呼び、次式で定義される。

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (1-6)$$

制御工学では、物体の運動などの過渡応答を考える必要がある。そのため、時間領域（ t 領域）では、微分および積分が重要となる。しかし、入出力が複数になるなど複雑な系では、微分方程式を解くこと自体が困難なことが多くなる。

一方で、ラプラス変換では、微分および積分が乗減算で表現された線形方程式としての解法が可能となる。そのため、制御工学では、ラプラス変換により微分方程式・積分方程式を、 s 領域の線形方程式として考える。

ただし、本実験で扱うステップ応答のような応答を見る上では、時間領域で扱う必要があるため、ラプラス変換して演算した後、ラプラス逆変換により、時間領域に戻す。そのため、ラプラス変換だけでなく、ラプラス逆変換についても、理解しておく必要がある。

しかし、制御工学の概要を理解したいのであれば、ラプラス逆変換については、次の手順をとりあえず、理解しておけばよい。

II. 2次遅れ系におけるステップ応答

伝達関数が、

$$G(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-1)$$

で与えられる系は、2次遅れ系と呼ばれる。この2次遅れ系のステップ応答は、式(2-1)をラプラス逆変換することによって、次の様に、求まる。

$$O(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}\right) \quad (2-2)$$

これをグラフ化すると、図 2-1 となる。

※ステップ応答

ある時間 t において、加速度 ∞ で、絶対値 1 の値を入力したときの出力状態を見ること。

ステップ関数

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_1) \\ 1 & (t \geq t_1) \end{cases}$$

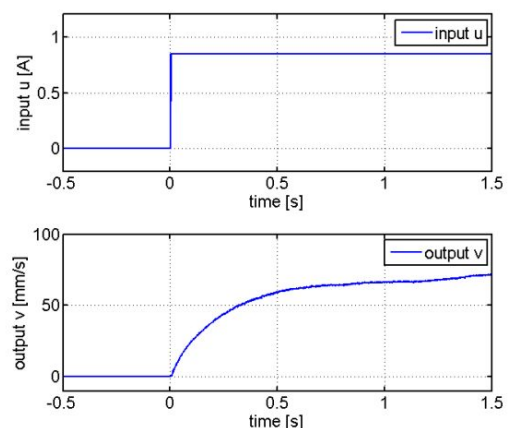


図 II-1 ステップ応答の概念

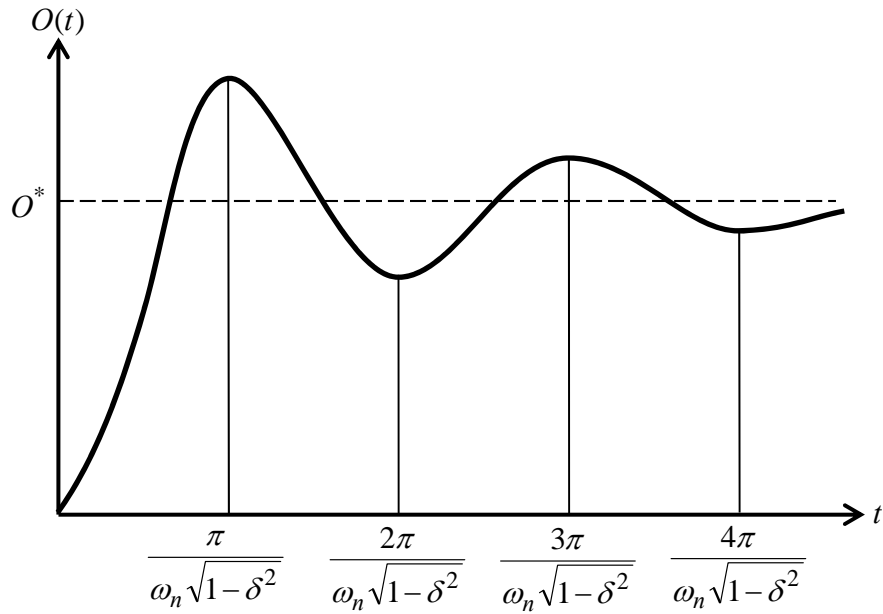


図 II-2 2次遅れ系 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ のステップ応答

図 II-2 において、オーバーシュートによる最初のピークが来るまでの時間は、

$$T_O = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

で表される。その後は、一定周期で振動しながら、減衰していく。(ただし、この現象は、 $\delta < 1$ の場合であり、 $\delta \geq 1$ の場合には、オーバーシュートや振動しながらの減衰が現れない。)

なお、図 II-3 にステップ応答における代表的な応答例を示す。

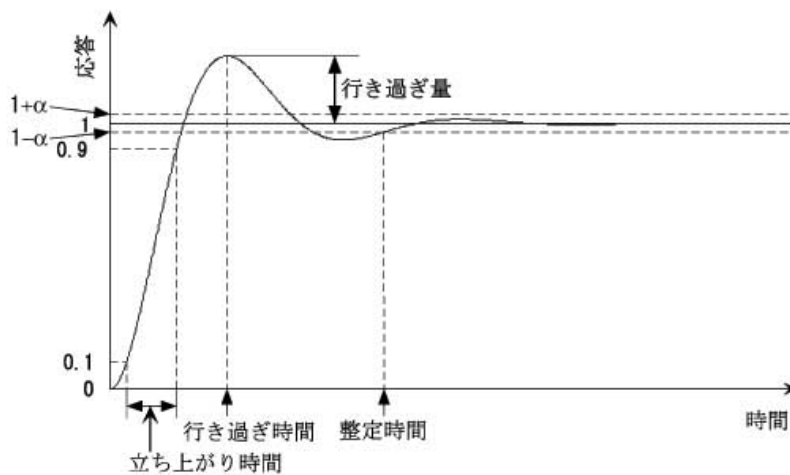


図 II-3 ステップ応答における応答例

多変数系のモデルにおいて、変数が線形独立の関係にない場合、運動方程式を直接求めることは難しい。さらに、一般的に他変数系のモデルにおいて変数が線形独立になっていることは少ない。そこで、他変数系モデルにおいては、ラグランジュアンを利用して運動方程式を求める。

ラグランジュアン L は、系全体の運動エネルギー T 、ポテンシャルエネルギー U から次のように求めることができる。

$$L = T - U$$

このラグランジュアン L は、時間 t の関数であるが、さらに時間 t に依存する n 個の変数 α_i ($i = 1, \dots, n$) で構成されていると、変数 α_i に関する運動方程式は次式により求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = f_{\alpha_i}$$